Origami et mathématiques, une rencontre entre artistes et chercheurs

Conférence « Amphis pour tous »

Pierre Hyvernat (pierre.hyvernat@univ-smb.fr)

Laboratoire de mathématiques, université Savoie Mont Blanc

Séminaire CMI, novembre 2018

Laboratoire de Mathématiques

Plan

1. Origami, cocottes, grues et bateaux
2. Mathématiques et serviettes
3. Mathématiques au service de l'origami
4. Origami, source de questions mathématiques

Qu’est-ce que l’origami ?

折り紙

Origami : art du pliage de papier,

Qu'est-ce que l'origami ?

折り紙

Origami : art du pliage de papier, du japonais **ori** (plier)

Qu’est-ce que l’origami ?

折り紙

Origami : art du pliage de papier, du japonais *ori* (plier) et **kami** (papier)...

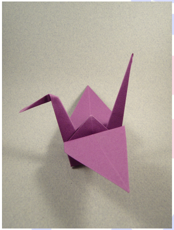
Qu’est-ce que l’origami ?

折り紙

Origami : art du pliage de papier, du japonais *ori* (plier) et *kami* (papier)...

Son origine est incertaine :

- Japon ?



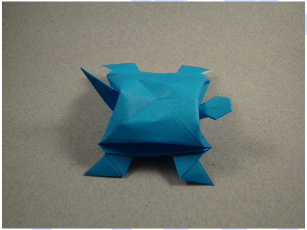
Qu'est-ce que l'origami ?

折り紙

Origami : art du pliage de papier, du japonais *ori* (plier) et *kami* (papier)...

Son origine est incertaine :

- Japon ?
- Chine ?



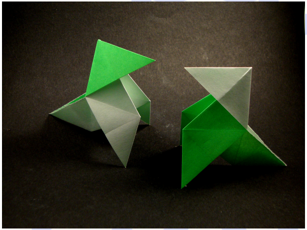
Qu’est-ce que l’origami ?

折り紙

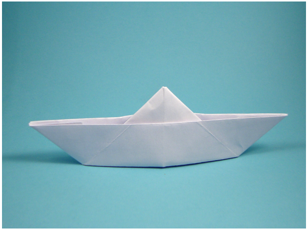
Origami : art du pliage de papier, du japonais *ori* (plier) et *kami* (papier)...

Son origine est incertaine :

- Japon ?
- Chine ?
- Europe ?

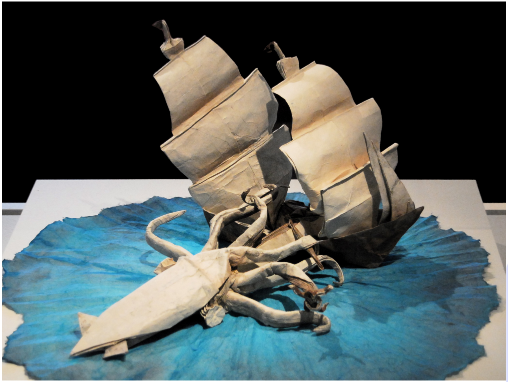


À quoi ça ressemble ?



traditionnel : *bateau*

À quoi ça ressemble ?

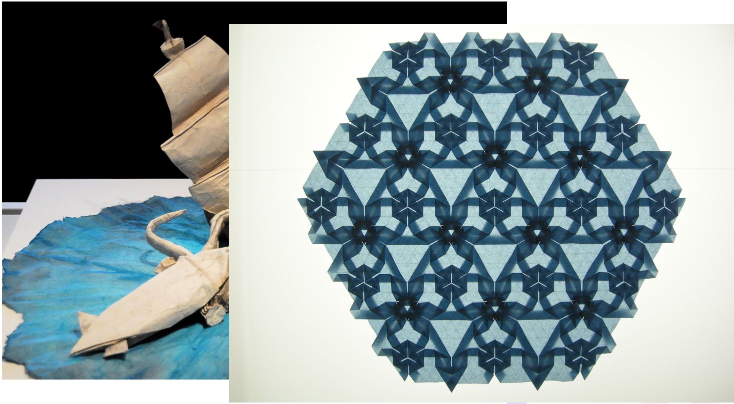


Brian Chan (USA) : *Kraken* [1]

À quoi ça ressemble ?

Brian Chan (USA) : *Kraken*, détail [1]

À quoi ça ressemble ?

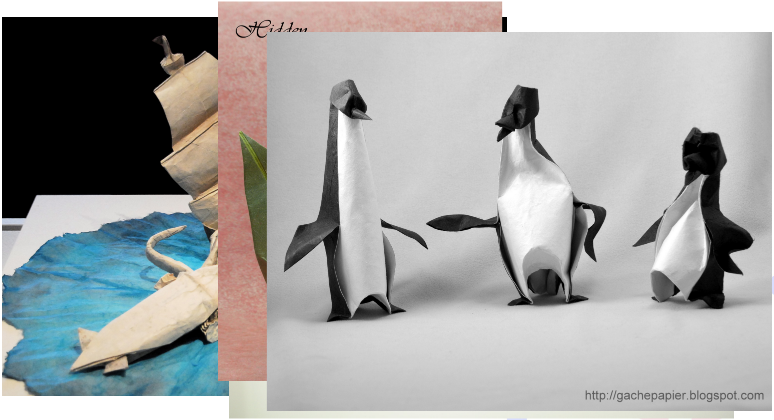


Melisande* (Suisse) : *Wild tulip tessellation* [2]

À quoi ça ressemble ?

Sébastien Limet (France) : *Climb Peaks* [3]

À quoi ça ressemble ?

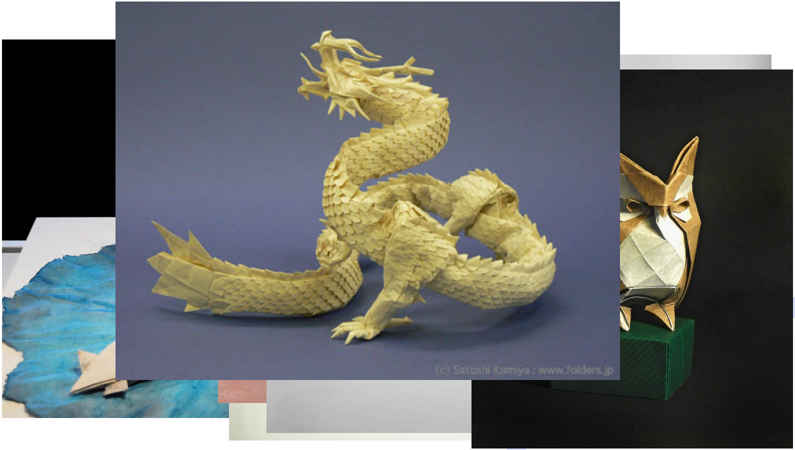


Gachepapier (Allemagne) : *penguins* [4]

À quoi ça ressemble ?

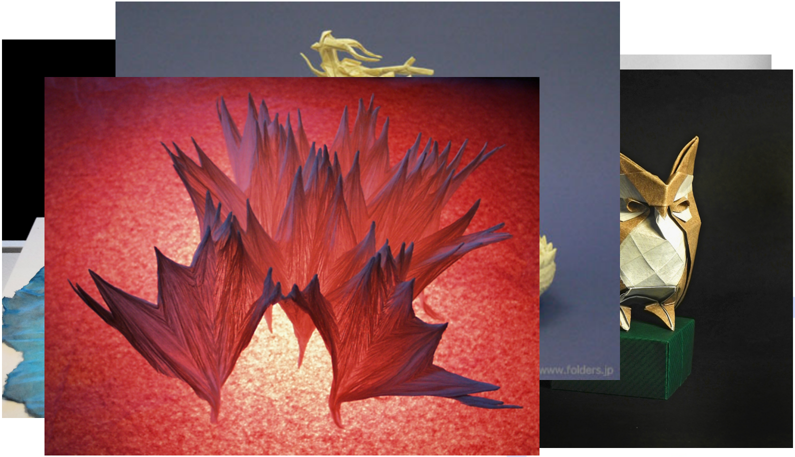
Roman Diaz (Uruguay) : *hibou* [5]

À quoi ça ressemble ?



Satoshi Kamiya (Japon) : *Ryuzin* [6]

À quoi ça ressemble ?



Vincent Floderer : *froissage* [7]

À quoi ça ressemble ?

Nguyen Tu Tuan (Vietnam) : *Wizard* [8]

Représentation

La séquence de plis pour obtenir un modèle est en général donnée par un **diagramme**.

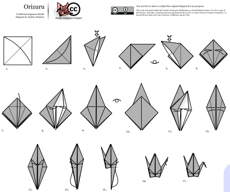


diagramme de la grue

Représentation

La séquence de plis pour obtenir un modèle est en général donnée par un **diagramme.**

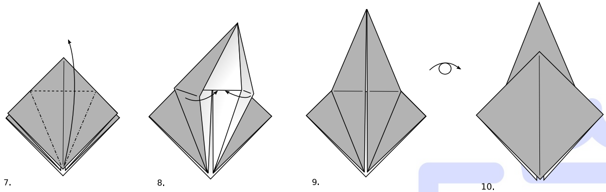
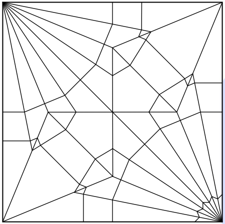


diagramme de la grue

Représentation

La séquence de plis pour obtenir un modèle est en général donnée par un **diagramme.**

L'ensemble des plis finaux sur la feuille peut être donné par une **carte de plis** (CP).

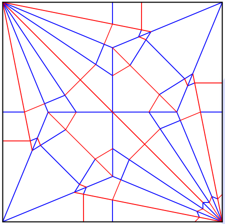


carte de plis *neutre* de la grue

Représentation

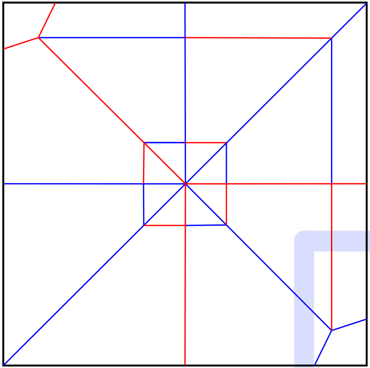
La séquence de plis pour obtenir un modèle est en général donnée par un **diagramme.**

L'ensemble des plis finaux sur la feuille peut être donné par une **carte de plis** (CP).



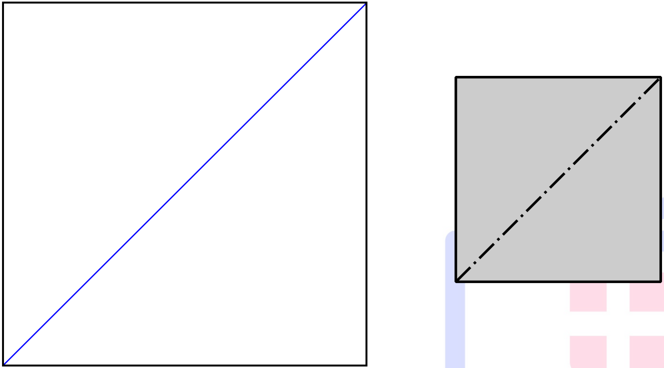
carte de plis *orientée* de la grue : vallées et montagnes

Travaux pratiques



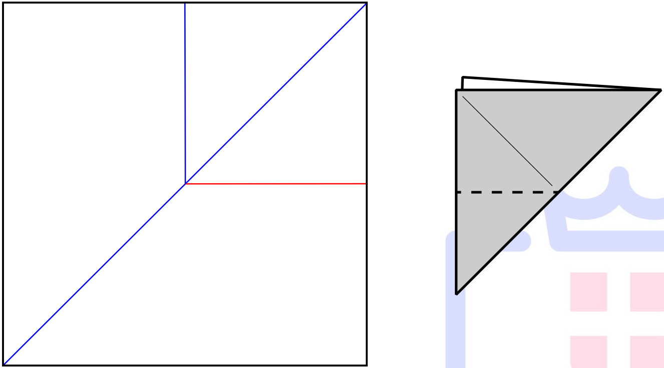
carte de plis mystère

Travaux pratiques



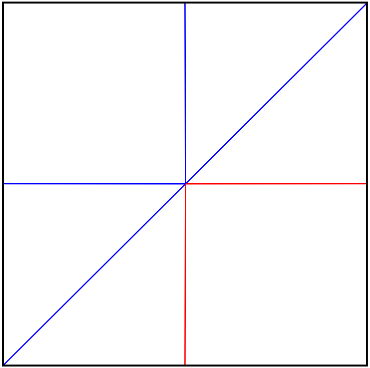
carte de plis mystère : pli 1

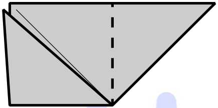
Travaux pratiques



carte de plis mystère : pli 2

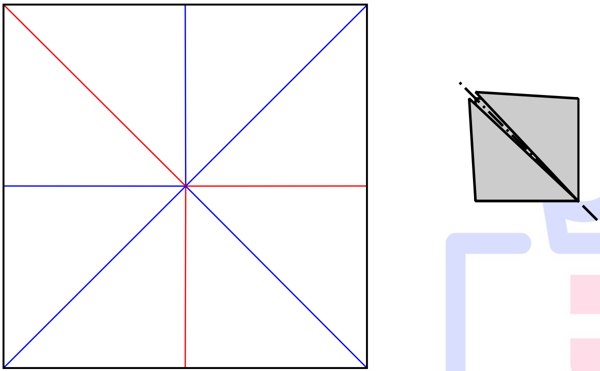
Travaux pratiques





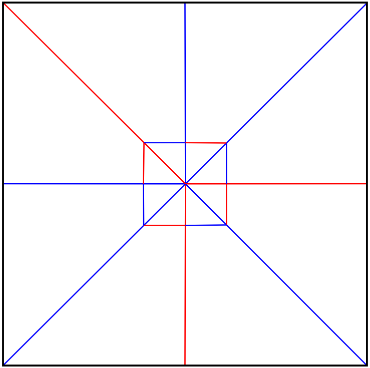
carte de plis mystère : pli 3

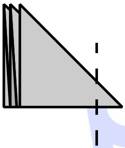
Travaux pratiques



carte de plis mystère : pli 4

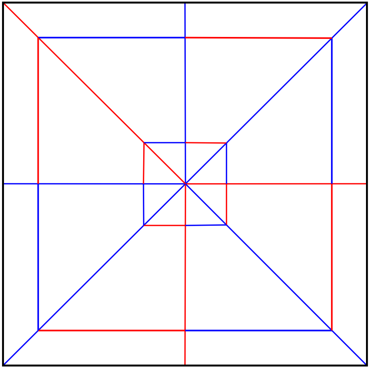
Travaux pratiques

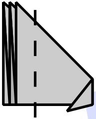




carte de plis mystère : pli 5

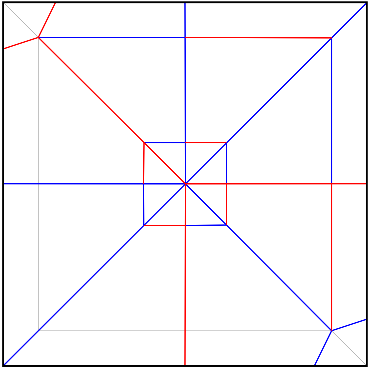
Travaux pratiques

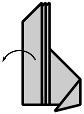




carte de plis mystère : pli 6

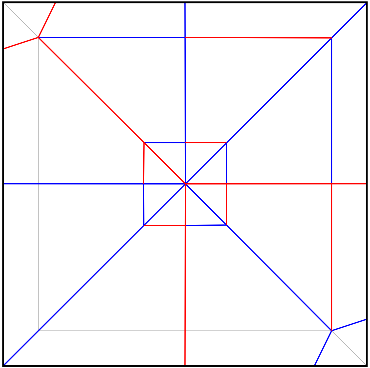
Travaux pratiques

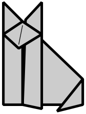




carte de plis mystère : pli 7

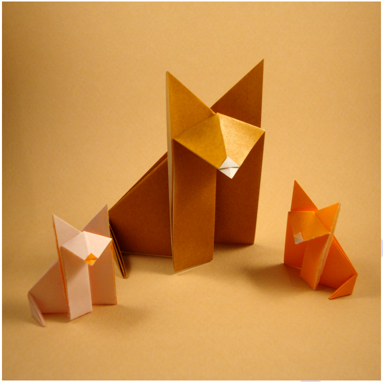
Travaux pratiques





Mitsuo Okuda : renard

Travaux pratiques



Mitsuo Okuda : renard

Plan

Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.

Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.

Ils essaient de *deviner* ces propriétés avant de les *démontrer*.

Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.

Lemma 3.4. The operation $\mathcal{M}_f(\_)$ is the object part of a monad on $\mathsf{Span}_{\mathsf{Set}}$. This monad gives the free commutative $\times$-monoid in $\mathsf{Span}_{\mathsf{Set}}$. Because $\mathsf{Span}_{\mathsf{Set}}$ is self-dual, this is also the free commutative $\times$-comonoid comonad.

The unit and multiplication are inherited from Set:

$$
w_A \overset{\mathsf{def}}{=} \begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ \mathbf{1} & & \mathcal{M}_f(A) \end{tikzcd}
\qquad
c_A \overset{\mathsf{def}}{=} \begin{tikzcd} & \mathcal{M}_f(A) \times \mathcal{M}_f(A) \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "\uplus"] & \\ \mathcal{M}_f(A) \times \mathcal{M}_f(A) & & \mathcal{M}_f(A) \end{tikzcd}
$$

where ε picks the empty multiset and $\uplus$ is the union of multisets.

Just as in $\mathsf{Span}_{\mathsf{Set}}$, the infinite product (which is also the coproduct) distributes over the binary tensor in $\mathsf{PSim}_{\mathsf{Set}}$:

$$\bigoplus_{k\geq 0} Q \otimes P_k \quad \cong \quad Q \otimes \bigoplus_{k \geq 0} P_k \ .$$

un *lemme*

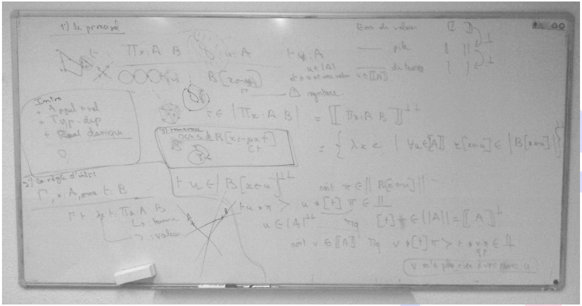
Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.

Ils se trompent,
reviennent en arrière
et recommencent.

Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.



un tableau de mathématicien

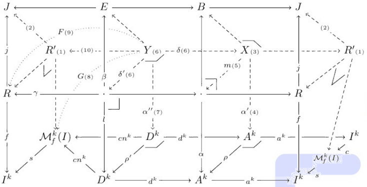
Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.

Ces constructions sont parfois abstraites,

Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.



where the bottom layer comes from Lemma 3.5 and:

(1) R' is constructed by pullback;
(2) is obtained by composition;
(3) X is obtained by pullback;
(4) α' is the mediating arrow, where $(3) \to I^k$ is $(3) \to R' \to \mathcal{M}^k_f(I) \to I^k$;

un diagramme commutatif

Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.

parfois concrètes.

Mathématiques

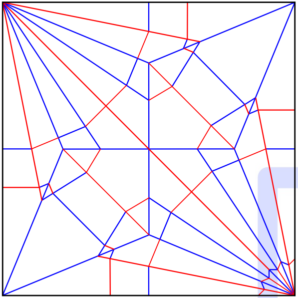
Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.

```
let rec compatible t1 t2 = match t1,t2 with
      Constructor(c1,t1), Constructor(c2,t2) -> c1=c2 && compatible t1 t2
    | Tuple(l1), Tuple(l2) ->
        List.length l1 = List.length l2 && List.for_all2 compatible l1 l2
    | Epsilon(ds,x), Epsilon(es,y) -> ds=es && x=y
    | Constructor(_,t), Sum(s)
    | Sum(s), Constructor(_,t) ->
        let s_minus = List.map (fun (w, ds, x)->(decr w, ds, x)) in
        compatible t (Sum(s_minus))
```

un programme

Mathématiques

Les mathématiciens essaient de découvrir des propriétés cachées de constructions mentales complexes.



une carte de plis

Problème de la serviette

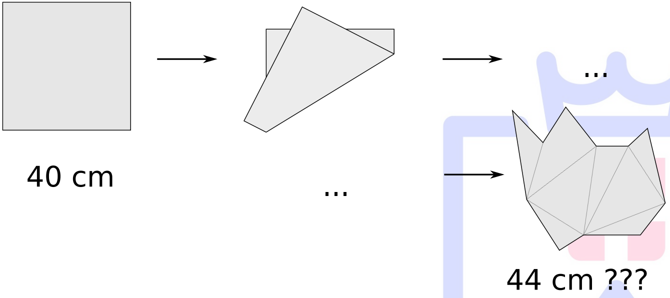
Question

Peut-on plier une serviette de manière à obtenir une figure de périmètre supérieur à celui de la feuille de départ ?

Problème de la serviette

Question

Peut-on plier une serviette de manière à obtenir une figure de périmètre supérieur à celui de la feuille de départ ?



Conjecture

Quelques tests semblent montrer que c'est impossible.

Conjecture

Quelques tests semblent montrer que c'est impossible.

Conjecture

Le périmètre d'une feuille pliée à plat est plus petit que le périmètre de la feuille.

Conjecture

Quelques tests semblent montrer que c’est impossible.

Conjecture

Le périmètre d’une feuille pliée à plat est plus petit que le périmètre de la feuille.

Les essais infructueux ne prouvent rien.

Conjecture

Quelques tests semblent montrer que c'est impossible.

Conjecture

Le périmètre d'une feuille pliée à plat est plus petit que le périmètre de la feuille.

Les essais infructueux ne prouvent rien.

Peut-on faire une preuve de cette conjecture ?

Un lemme, une preuve

On commence par un *lemme* :

Un lemme, une preuve

On commence par un *lemme* :

Lemme

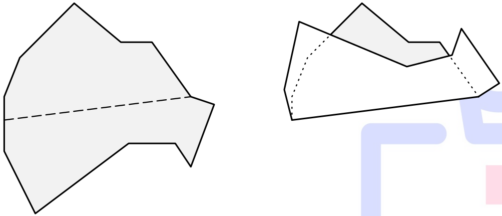
En pliant un polygone le long d'une droite, le périmètre diminue.

Un lemme, une preuve

On commence par un *lemme* :

Lemme

En pliant un polygone le long d'une droite, le périmètre diminue.



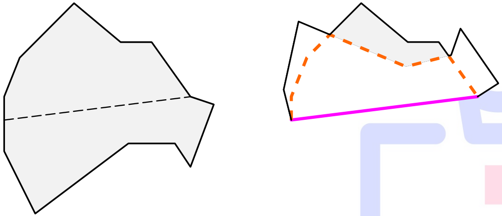
un pli sur un polygone

Un lemme, une preuve

On commence par un *lemme* :

Lemme

En pliant un polygone le long d'une droite, le périmètre diminue.



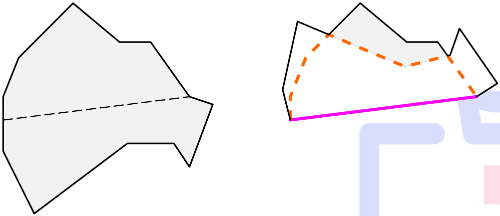
périmètre gagné, périmètre perdu

Un lemme, une preuve

On commence par un *lemme* :

Lemme

En pliant un polygone le long d'une droite, le périmètre diminue.



périmètre gagné, périmètre perdu

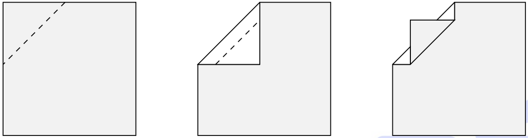
On finit la preuve par *récurrence*.

OUPS !!!

Une erreur s'est glissée dans notre raisonnement !

OUPS !!!

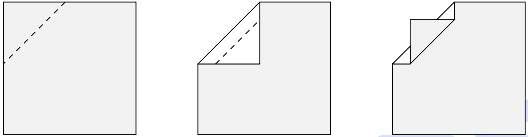
Une erreur s'est glissée dans notre raisonnement !



On n'est pas obligé de plier toutes les épaisseurs...

OUPS !!!

Une erreur s'est glissée dans notre raisonnement !

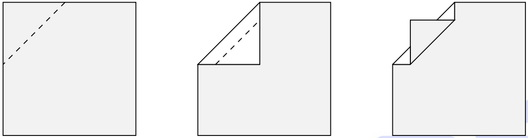


On n'est pas obligé de plier toutes les épaisseurs...

Le périmètre peut donc augmenter **localement**.

OUPS !!!

Une erreur s'est glissée dans notre raisonnement !



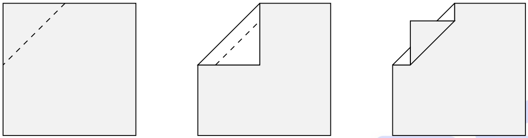
On n'est pas obligé de plier toutes les épaisseurs...

Le périmètre peut donc augmenter **localement**.

Le lemme reste vrai, mais il ne résout pas la conjecture.

OUPS !!!

Une erreur s'est glissée dans notre raisonnement !



On n'est pas obligé de plier toutes les épaisseurs...

Le périmètre peut donc augmenter **localement**.

Le lemme reste vrai, mais il ne résout pas la conjecture.

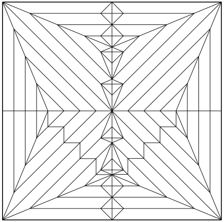
Il faut trouver une autre preuve !

La réponse définitive

En fait, la conjecture est **fausse** !

La réponse définitive

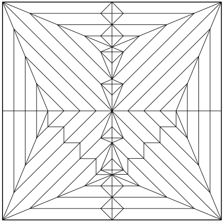
La carte de plis



(périmètre 200 cm)

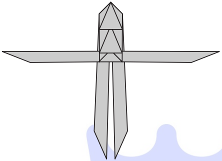
La réponse définitive

La carte de plis



(périmètre 200 cm)

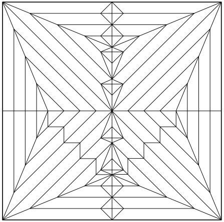
donne [13]



(périmètre 206 cm)

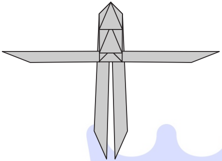
La réponse définitive

La carte de plis



(périmètre 200 cm)

donne [13]

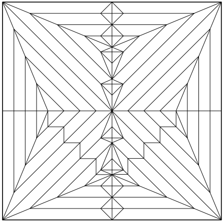


(périmètre 206 cm)

3% de gain, c'est pas mal,

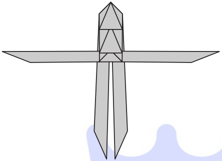
La réponse définitive

La carte de plis



(périmètre 200 cm)

donne [13]

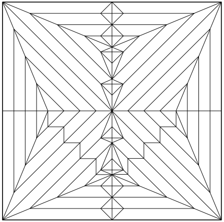


(périmètre 206 cm)

3% de gain, c'est pas mal,
mais on peut faire beaucoup mieux...

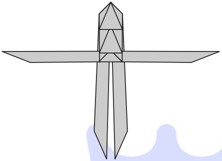
La réponse définitive

La carte de plis



(périmètre 200 cm)

donne [13]



(périmètre 206 cm)

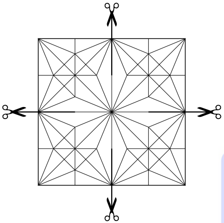
Théorème

En théorie, il est possible de rendre le périmètre d'une feuille pliée aussi grand que l'on veut !

Plan

La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.



un crabe traditionnel

La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L’interdiction de découper est relativement récente.

La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L'interdiction de découper est relativement récente. Elle coïncide avec les progrès techniques.

La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L'interdiction de découper est relativement récente. Elle coïncide avec les progrès techniques.

la guerre des insectes, Brian Chan : lucane [1]

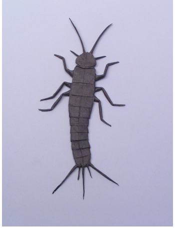
La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L’interdiction de découper est relativement récente. Elle coïncide avec les progrès techniques.

la guerre des insectes, Shuki Kato : scarabé rhinocéros [11]

La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L'interdiction de découper est relativement récente. Elle coïncide avec les progrès techniques.



la guerre des insectes, Robert Lang : lépisme [10]

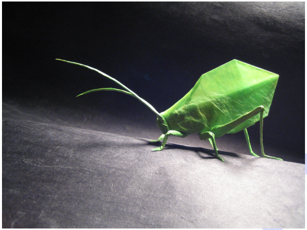
La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L'interdiction de découper est relativement récente. Elle coïncide avec les progrès techniques.

la guerre des insectes, Robert Lang : scarabé [10]

La guerre des insectes

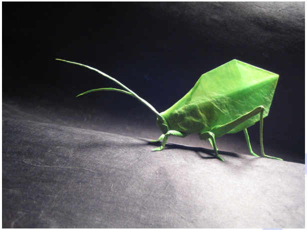
- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L'interdiction de découper est relativement récente. Elle coïncide avec les progrès techniques.



la guerre des insectes, Brian Chan : katydid [1]

La guerre des insectes

- De nombreux modèles traditionnels nécessitaient des coupes.
- L'interdiction de découper est relativement récente. Elle coïncide avec les progrès techniques.



la guerre des insectes, Brian Chan : katydid [1]

Question

Peut-on vraiment plier n'importe quel modèle ?

Réponse du mathématicien

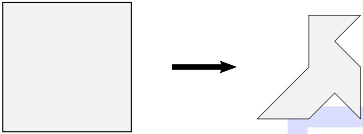
Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.



Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

Idée de la preuve :

1. on plie le papier en accordéon pour obtenir une longue bande fine,

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

Idée de la preuve :

1. on plie le papier en accordéon pour obtenir une longue bande fine,
2. on découpe le polygone en triangles,

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

Idée de la preuve :

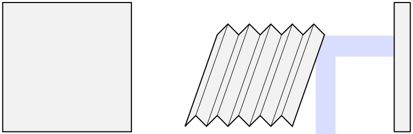
1. on plie le papier en accordéon pour obtenir une longue bande fine,
2. on découpe le polygone en triangles,
3. on fait des « zigzags » avec la bande pour recouvrir les triangles.

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

Idée de la preuve :



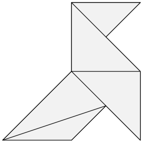
1 – accordéon

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

Idée de la preuve :



2 – triangles

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

Idée de la preuve :

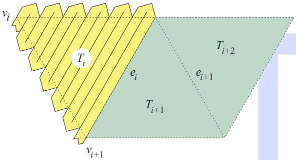


Figure 15.4. Covering a triangle T_i by zigzagging parallel to the edge e_i incident to the next triangle T_{i+1}, choosing the initial direction so that we end at the vertex v_{i+1} opposite the next edge e_{i+1}.

3 – zigzags [14]

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

La preuve est correcte,

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

La preuve est correcte,

mais inutilisable en pratique.

Réponse du mathématicien

Théorème

N'importe quel polygone peut être obtenu en pliant une feuille de papier carrée.

La preuve est correcte,

mais inutilisable en pratique.

Elle n'aide pas les plieurs à inventer des modèles.

Réponse du mathématicien plieur

Pour obtenir des figures à multiples pattes, on fait de *l'agencement de disques*.

Réponse du mathématicien plieur

Pour obtenir des figures à multiples pattes, on fait de *l'agencement de disques*.

Cette méthode est due à T. Meguro et R.J. Lang :

Réponse du mathématicien plieur

Pour obtenir des figures à multiples pattes, on fait de *l'agencement de disques*.

Cette méthode est due à T. Meguro et R.J. Lang :

- une pointe (fine) occupe une région circulaire du papier,

Réponse du mathématicien plieur

Pour obtenir des figures à multiples pattes, on fait de *l'agencement de disques*.

Cette méthode est due à T. Meguro et R.J. Lang :

- une pointe (fine) occupe une région circulaire du papier,
  (le bout de la pointe correspond au centre)

Réponse du mathématicien plieur

Pour obtenir des figures à multiples pattes, on fait de *l'agencement de disques*.

Cette méthode est due à T. Meguro et R.J. Lang :

- une pointe (fine) occupe une région circulaire du papier,
- deux pointes occupent deux régions circulaires disjointes.

Réponse du mathématicien plieur

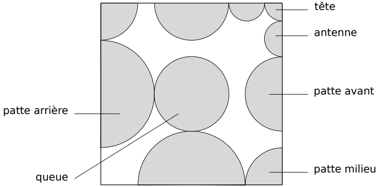
Pour obtenir des figures à multiples pattes, on fait de *l'agencement de disques*.

Cette méthode est due à T. Meguro et R.J. Lang :

- une pointe (fine) occupe une région circulaire du papier,
- deux pointes occupent deux régions circulaires disjointes.

On peut inverser le phénomène :

Réponse du mathématicien plieur

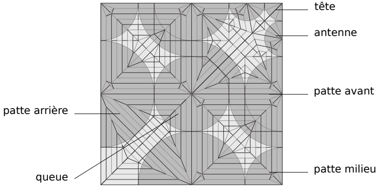


les cercles sur la feuille

On peut inverser le phénomène :

- on place des disques sur la feuille,

Réponse du mathématicien plieur

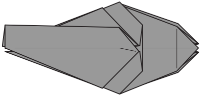


la carte de plis correspondante [10]

On peut inverser le phénomène :

- on place des disques sur la feuille,
- on ajoute des plis pour les transformer en pointes,

Réponse du mathématicien plieur

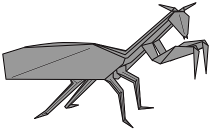


une base *uniaxiale* [13]

On peut inverser le phénomène :

- on place des disques sur la feuille,
- on ajoute des plis pour les transformer en pointes,
- on plie la base,

Réponse du mathématicien plieur



une mante religieuse [13]

On peut inverser le phénomène :

- on place des disques sur la feuille,
- on ajoute des plis pour les transformer en pointes,
- on plie la base,
- on termine le modèle...

Réponse du mathématicien plieur

Robert Lang, *Mante religieuse* [10]

On peut inverser le phénomène :

- on place des disques sur la feuille,
- on ajoute des plis pour les transformer en pointes,
- on plie la base,
- on termine le modèle...

Réponse du mathématicien plieur

Robert Lang, *Mante religieuse* [10]

On peut inverser le phénomène :

- on place des disques sur la feuille,
- on ajoute des plis pour les transformer en pointes,
- on plie la base,
- on termine le modèle...

La dernière étape n'est pas automatisable.

Plan

cartes routières

Question

Quelle est la complexité du repliage d'une carte ?

cartes routières

Question

Quelle est la complexité du repliage d'une carte ?

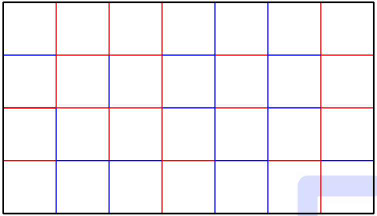
carte froissée [12]

- Pour un humain, replier une carte routière est compliqué,

cartes routières

Question

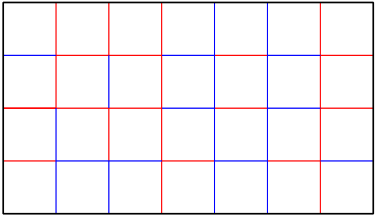
Quelle est la complexité du repliage d'une carte ?



carte (de plis) *orthogonale*

- Pour un humain, replier une carte routière est compliqué,
- pour un ordinateur, replier une carte *orthogonale* est facile.

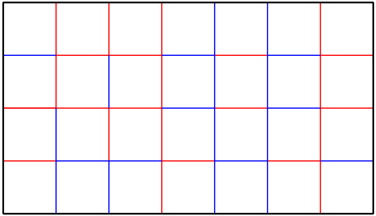
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1.
2.
3.

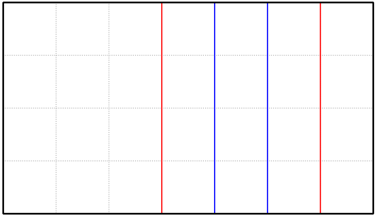
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*,
2.
3.

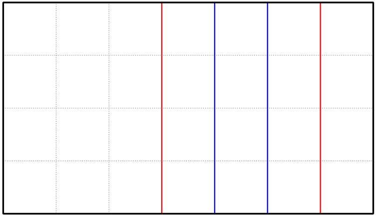
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2.
3.

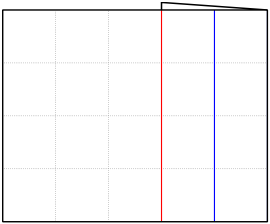
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2. on les plie,
3.

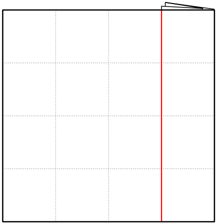
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2. on les plie, (en choisissant un *pli de symétrie* à chaque fois)
3.

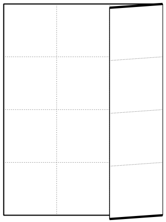
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2. on les plie, (en choisissant un *pli de symétrie* à chaque fois)
3.

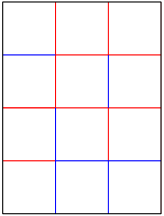
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2. on les plie, (en choisissant un *pli de symétrie* à chaque fois)
3.

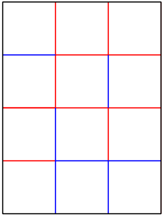
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2. on les plie, (en choisissant un *pli de symétrie* à chaque fois)
3.

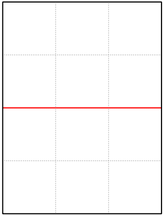
cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2. on les plie, (en choisissant un *pli de symétrie* à chaque fois)
3. on recommence

cartes orthogonales – 2



Algorithme pour replier une carte orthogonale :

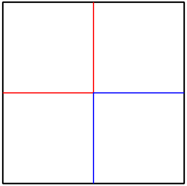
1. on repère les plis *traversants*, (ils ont tous la même direction)
2. on les plie, (en choisissant un *pli de symétrie* à chaque fois)
3. on recommence, ...

Les cartes orthogonales : résumé

- L’algorithme fonctionne exactement lorsqu’un pliage existe,

Les cartes orthogonales : résumé

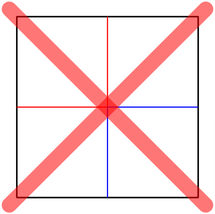
- L'algorithme fonctionne exactement lorsqu'un pliage existe,



l'algorithme ne fonctionne pas : il n'existe pas de pliage simple

Les cartes orthogonales : résumé

- L'algorithme fonctionne exactement lorsqu'un pliage existe,



l'algorithme ne fonctionne pas : il n'existe pas de pliage simple

Les cartes orthogonales : résumé

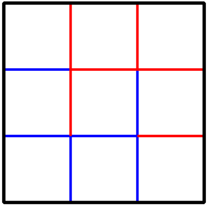
- L'algorithme fonctionne exactement lorsqu'un pliage existe,
- l'algorithme fonctionne seulement pour les plis *simples*,

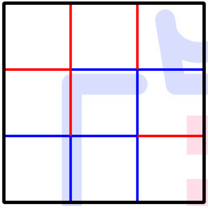
(à travers toutes les épaisseurs)

Les cartes orthogonales : résumé

- L'algorithme fonctionne exactement lorsqu'un pliage existe,
- l'algorithme fonctionne seulement pour les plis *simples*,

(à travers toutes les épaisseurs)





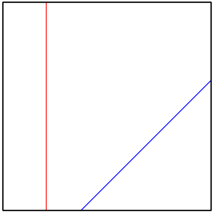
l'algorithme ne fonctionne pas, mais il existe un pliage complexe

Les cartes orthogonales : résumé

- L'algorithme fonctionne exactement lorsqu'un pliage existe,
- l'algorithme fonctionne seulement pour les plis *simples*,
- l'algorithme ne fonctionne pas avec des diagonales.

Les cartes orthogonales : résumé

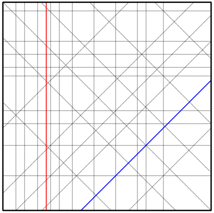
- L'algorithme fonctionne exactement lorsqu'un pliage existe,
- l'algorithme fonctionne seulement pour les plis *simples*,
- l'algorithme ne fonctionne pas avec des diagonales.



les plis traversants n'ont pas tous la même direction

Les cartes orthogonales : résumé

- L'algorithme fonctionne exactement lorsqu'un pliage existe,
- l'algorithme fonctionne seulement pour les plis *simples*,
- l'algorithme ne fonctionne pas avec des diagonales.



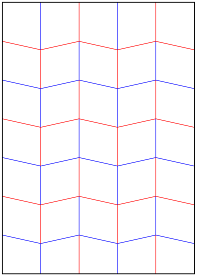
l'algorithme ne sait pas par qui commencer

Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

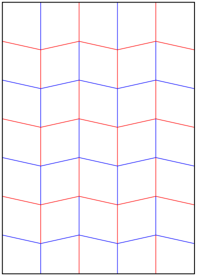


Koryo Miura :
carte *Miura-Ori*

Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

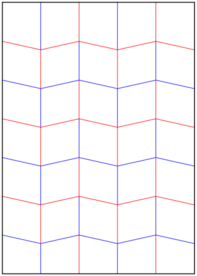
- elle propage les plis *automatiquement*,



Koryo Miura :
carte *Miura-Ori*

Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

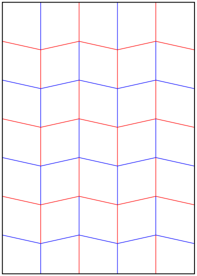


Koryo Miura :
carte *Miura-Ori*

- elle propage les plis *automatiquement*,
- elle minimise les contraintes mécaniques,

Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :



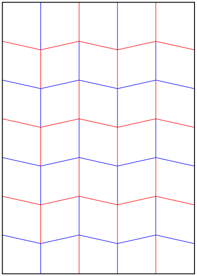
Koryo Miura :
carte *Miura-Ori*

- elle propage les plis *automatiquement*,
- elle minimise les contraintes mécaniques,
- elle est *rigide*.

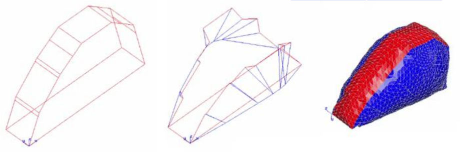
Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

- elle propage les plis *automatiquement*,
- elle minimise les contraintes mécaniques,
- elle est *rigide*.



Koryo Miura :
carte *Miura-Ori*

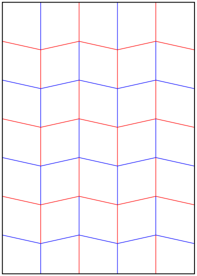


modelisation d'airbag

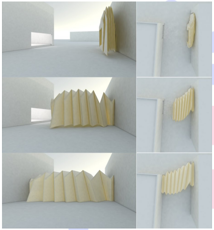
Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

- elle propage les plis *automatiquement*,
- elle minimise les contraintes mécaniques,
- elle est *rigide*.



Koryo Miura :
carte *Miura-Ori*

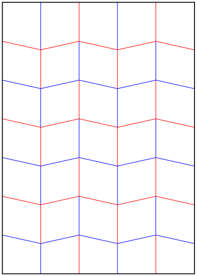


projet architectural de Tomohiro Tachi

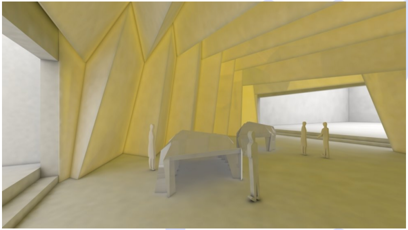
Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

- elle propage les plis *automatiquement*,
- elle minimise les contraintes mécaniques,
- elle est *rigide*.



Koryo Miura : carte *Miura-Ori*

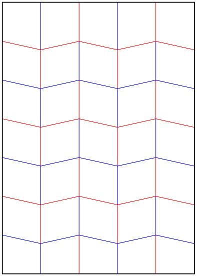


projet architectural de Tomohiro Tachi

Parenthèse

Il y a une meilleure manière de plier une carte standard :

- elle propage les plis *automatiquement*,
- elle minimise les contraintes mécaniques,
- elle est *rigide*.



Koryo Miura : carte *Miura-Ori*

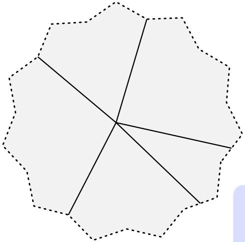
Zhong You et Kaori Kuribayashi-Shigetomi

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat.**

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat.**

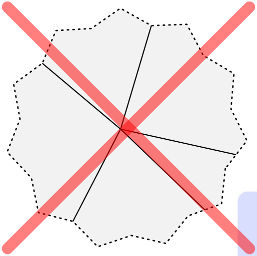


contrainte de parité :

autour de chaque point, il y a un nombre pair de plis

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat.**

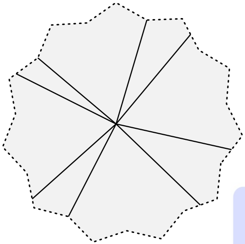


contrainte de parité :

autour de chaque point, il y a un nombre pair de plis

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat.**

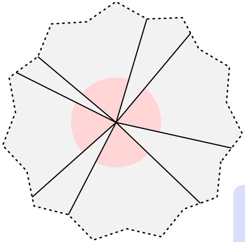


contrainte de Kawasaki :

autour de chaque point, la somme des angles pairs
est égale à la somme des angles impairs

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat.**

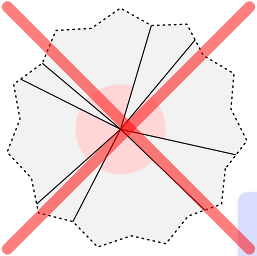


contrainte de Kawasaki :

autour de chaque point, la somme des angles pairs est égale à la somme des angles impairs

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat**.

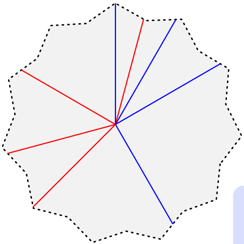


contrainte de Kawasaki :

autour de chaque point, la somme des angles pairs
est égale à la somme des angles impairs

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat.**

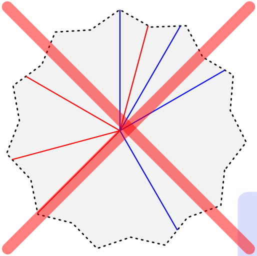


contrainte de Maekawa :

autour de chaque point, la différence entre le nombre de montagnes et de vallées est 2

Contraintes locales de pliabilité

Toutes les cartes de plis ne peuvent pas être pliées **à plat**.



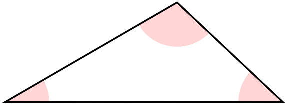
contrainte de Maekawa :

autour de chaque point, la différence entre le nombre de montagnes et de vallées est 2

Critère de Maekawa : preuve

Lemme

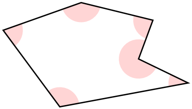
La somme des angles d'un triangle fait 180.



Critère de Maekawa : preuve

Lemme

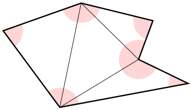
La somme des angles d'un polygone à n cotés fait $(n-2) \times 180$.



Critère de Maekawa : preuve

Lemme

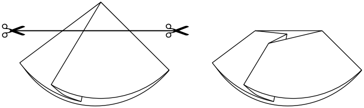
La somme des angles d'un polygone à n cotés fait $(n-2) \times 180$.



Critère de Maekawa : preuve

Lemme

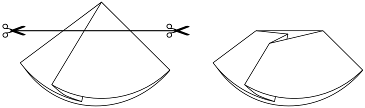
La somme des angles d'un polygone à n cotés fait $(n-2) \times 180$.



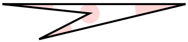
Critère de Maekawa : preuve

Lemme

La somme des angles d'un polygone à n cotés fait $(n-2) \times 180$.



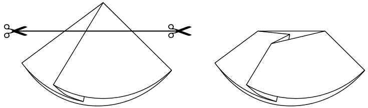
- il y a n plis, dont M montagnes et V vallées,



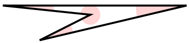
Critère de Maekawa : preuve

Lemme

La somme des angles d'un polygone à n cotés fait $(n-2) \times 180$.



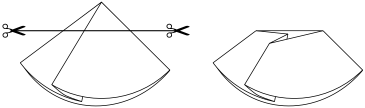
- il y a n plis, dont M montagnes et V vallées,
- chaque montagne fait 0, chaque vallée fait 360,

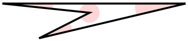


Critère de Maekawa : preuve

Lemme

La somme des angles d'un polygone à n cotés fait $(n-2) \times 180$.



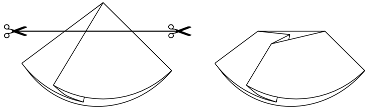


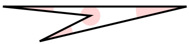
- il y a n plis, dont M montagnes et V vallées,
- chaque montagne fait 0, chaque vallée fait 360,
- on a $(M+V-2) \times 180 = M \times 0 + V \times 360$,

Critère de Maekawa : preuve

Lemme

La somme des angles d'un polygone à n cotés fait $(n-2) \times 180$.





- il y a n plis, dont M montagnes et V vallées,
- chaque montagne fait 0, chaque vallée fait 360,
- on a $(M + V - 2) \times 180 = M \times 0 + V \times 360$,
- ... on obtient $M = V + 2$.

Critères globaux ?

Théorème

*Le critère de Kawasaki est une condition nécéssaire et suffisante pour la pliabilité **locale** d'une CP neutre.*

Critères globaux ?

Théorème

Le critère de Kawasaki est une condition nécéssaire et suffisante pour la pliabilité ***locale*** *d'une CP neutre.*

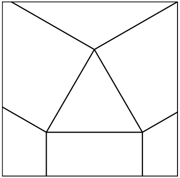
Malheureusement, ce n'est pas une condition suffisante pour la pliabilité **globale** d'une CP neutre :

Critères globaux ?

Théorème

Le critère de Kawasaki est une condition nécéssaire et suffisante pour la pliabilité ***locale*** *d'une CP neutre.*

Malheureusement, ce n'est pas une condition suffisante pour la pliabilité **globale** d'une CP neutre :

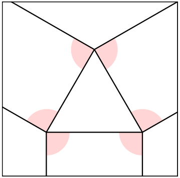


Critères globaux ?

Théorème

*Le critère de Kawasaki est une condition nécéssaire et suffisante pour la pliabilité **locale** d'une CP neutre.*

Malheureusement, ce n'est pas une condition suffisante pour la pliabilité **globale** d'une CP neutre :

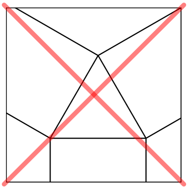


Critères globaux ?

Théorème

Le critère de Kawasaki est une condition nécéssaire et suffisante pour la pliabilité ***locale*** *d'une CP neutre.*

Malheureusement, ce n'est pas une condition suffisante pour la pliabilité **globale** d'une CP neutre :



Critères globaux ?

Théorème

Le critère de Kawasaki est une condition nécéssaire et suffisante pour la pliabilité ***locale*** *d'une CP neutre.*

Question

Peut-on trouver un critère global de pliabilité des CP facilement vérifiables par un ordinateur ?

Critères globaux ?

Théorème

*Le critère de Kawasaki est une condition nécéssaire et suffisante pour la pliabilité **locale** d'une CP neutre.*

Question

Peut-on trouver un critère global de pliabilité des CP facilement vérifiables par un ordinateur ?

Une réponse positive résoudrait un des sept problèmes du prix du millénaire.

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*

- un problème est *NP* si on peut vérifier ses solutions rapidement,

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*

- un problème est *NP* si on peut vérifier ses solutions rapidement,
- il est *NP difficile*, s'il est plus difficile que tous les problèmes NP,

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*

- un problème est *NP* si on peut vérifier ses solutions rapidement,
- il est *NP difficile*, s'il est plus difficile que tous les problèmes NP,
- résoudre un tel problème permet de résoudre tous les problèmes NP,

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est ***NP difficile****.*

- un problème est *NP* si on peut vérifier ses solutions rapidement,
- il est *NP difficile*, s'il est plus difficile que tous les problèmes NP,
- résoudre un tel problème permet de résoudre tous les problèmes NP,
- par exemple, de craquer le système cryptographique RSA !

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est ***NP difficile****.*

Un algorithme *efficace* vérifiant la pliabilité d'une carte impliquerait une réponse positive à la question

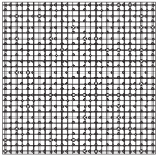
« est-ce que P=NP ? »

et rendrait son inventaire millionnaire.

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*

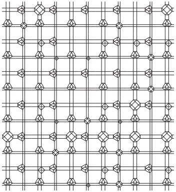


Etienne Cliquet, *Vers NP-complet* [9]

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*

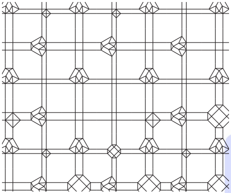


Etienne Cliquet, *Vers NP-complet* [9]

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est ***NP difficile****.*

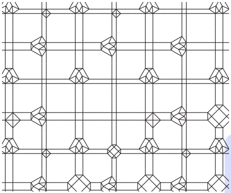


Etienne Cliquet, *Vers NP-complet* [9]

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*



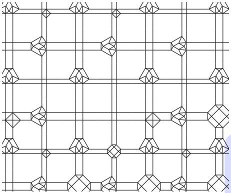
Etienne Cliquet, *Vers NP-complet* [9]

Plier cette CP nécessite de décider où mettre les vallées et les montagnes dans chacune des 784 intersections,

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est ***NP difficile****.*



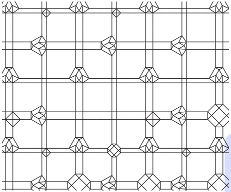
Etienne Cliquet, *Vers NP-complet* [9]

Plier cette CP nécessite de décider où mettre les vallées et les montagnes dans chacune des 784 intersections,
il y a 2^{784} possibilités,

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

*Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est **NP difficile**.*



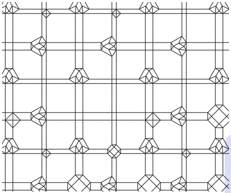
Etienne Cliquet, *Vers NP-complet* [9]

c’est à dire 1017458256970192607739235197558785674613152820177598291076089143640752752352543956-
2258044740099417557896316391896718201363966066977110847595769281085709884713890316130850241-
9410142185759152435680068435915159402496058513611411689167650816 possibilités.

Problèmes NP, devenir millionnaire

Théorème

Vérifier si une CP neutre est pliable à plat est ***NP difficile****.*



Etienne Cliquet, *Vers NP-complet* [9]

Rien ne peut retrouver les montagnes et les vallées...

Pour approfondir

- Robert Lang, *Origami Design Secrets*
- Joseph O'Rourke, *How to Fold It ?*
- Sara Adams, Happy Folding, `http://www.happyfolding.com/`
- Robert Lang, *The math and magic of origami*, `http://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami.html`
- Vanessa Gould, *Between the folds*, `http://www.greenfusefilms.com/index.html`

Contact

email : pierre.hyvernat@univ-smb.fr

internet : http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat

http://goo.gl/10hU0i

Références

[1] Brian Chan, site Flickr `http://www.flickr.com/photos/chosetec/sets/571146/`

[2] Melisande (Christiane Bettens), site Flickr `http://www.flickr.com/photos/melisande-origami/`

[3] Sébastien Limet, site Flickr `http://www.flickr.com/photos/-sebl-`

[4] Gachepapier, blog `http://gachepapier.blogspot.fr/`

[5] Roman Diaz, site Flickr `http://www.flickr.com/photos/88586913@N00/`

[6] Satoshi Kamiya, site internet `http://www.folders.jp/index.shtml`

[7] Vincent Floderer et le ≪ crimp ≫, site internet `http://www.le-crimp.org`

[8] Nguyen Tu Tuan, site Flickr `http://www.flickr.com/photos/73799906@N00/`

[9] Etienne Cliquet, site web `http://www.ordigami.net/`

[10] Robert Lang, site web `http://www.langorigami.com/`

[11] Shuki Kato, site Flickr `http://www.flickr.com/photos/origami-artist-galen/`

[12] Palomar, site web `http://www.palomarweb.com/`

[13] Robert J. Lang, *Origami Design Secrets*, AK Peters, 2011.

[14] Erik Demaine et Joseph O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms : Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, 2007.