UNE INTRODUCTION AUX FONCTIONS ZÊTA MOTIVIQUES

MICHEL RAIBAUT

Soit f un polynôme de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]$. Soit p un nombre premier. Pour tout entier n, on note F_n le nombre de solutions de l'équation $f(x_1, \ldots, x_d) = 0$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$. Borewicz et Shafarevich ont conjecturé dans un ouvrage paru en 1966 que la série génératrice

$$J_p(f, T) = \sum_{n \geq 0} F_n T^n$$

est une fraction rationnelle en T. Igusa prouva la conjecture en 1975, en utilisant l'intégration p-adique, le théorème de résolution des singularités d'Hironaka pour l'hypersurface $f = 0$ et la formule de changement de variables p-adique. Il introduisit pour cela la fonction $s \mapsto \int_{\mathbb{Z}_p^d} |f|_p^s \, dx$, appelée aujourd'hui *fonction zêta d'Igusa p-adique* de f.

Dans cet exposé, nous présenterons les *fonctions zêta motiviques* de Denef et Loeser, analogues sur $\mathbb{C}[[t]]$ des fonctions zêta d'Igusa p-adiques. Ce sont des séries génératrices à coefficients dans un anneau de Grothendieck de variétés construites à partir de l'intégration motivique de Kontsevich.

En particulier pour un polynôme f de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$, de manière analogue au cas p-adique, Denef et Loeser ont montré que les fonctions zêta motiviques sont rationnelles et contiennent notamment certains invariants des singularités de f le long de l'hypersurface $f = 0$. Dans le cas où f est à deux variables et s'annule à l'origine, nous expliciterons la forme rationnelle de la fonction zêta motivique à l'origine, en termes de polyèdres de Newton de f (travail en commun avec Pierrette Cassou-Noguès).

Date: 14 décembre 2018.